Def. (2.3.1): Ein **Ring** ist eine Menge R zusammen mit zwei Verknüpfungen

$$+, \cdot : R \times R \Longrightarrow R$$

für die gilt:

(R1) $(R,+)$ abelsche Gruppe

$a + b = b + a$

(R2) $\cdot$ assoziativ

(R3) Distributivität:

$$\forall a,b,c \in R: \quad a\cdot(b+c) = (a\cdot b) + (a\cdot c)$$
$$(a+b)\cdot c = (a\cdot c) + (b \cdot c)$$

Ein **Ring mit Eins** ist ein Ring, der ein neutrales Element 1 für $\cdot$ enthält.

$$(\exists 1 \in R: \forall a \in R: \quad 1\cdot a = a \cdot 1 = a)$$

Ein **kommutativer Ring** ist ein Ring, in dem $\cdot$ kommutativ ist.

$$(\forall a,b \in R: \quad a\cdot b = b \cdot a)$$

Konvention: 0 neutrales Element von $(G,+)$

$\cdot$ vor $+$

<u>Notizen:</u> $\forall a, b \in R$:

(i) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

(ii) $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b$
$= a \cdot (-b)$

(iii) $(-a)(-b) = a \cdot b$

<u>Def (2.3.2):</u> $(R, +, \cdot)$ Ring [mit Eins]
Eine Teilmenge $S \subset R$ heißt
<u>Unterring</u> [mit Eins], falls S
Untergruppe von $(R, +)$ ist und
$\forall a, b \in S$ gilt: $a \cdot b \in S$ [und $1 \in S$].

Ein <u>Homomorphismus von Ringen</u> [mit Eins]
$f: (R, +, \cdot) \longrightarrow (S, \oplus, \odot)$
ist ein Gruppenhomomorphismus
$f: (R, +) \longrightarrow (S, \oplus)$, für den außerdem
gilt: $\forall a, b \in R$: $f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)$
[und $f(1) = 1$]

Def (2.3.2): Ein Ring $(R, +, \cdot)$ ist **nullteilerfrei**, wenn für $a, b \in R$ gilt:

$$a \cdot b = 0 \implies (a = 0 \text{ oder } b = 0)$$

Notiz: In einem nullteilerfreien Ring gilt $\forall a \neq 0$:

$$a \cdot b = a \cdot c \implies b = c$$

und $$b \cdot a = c \cdot a \implies b = c$$

Def (2.3.3): Ein **Körper** (en: "field") ist eine Menge K zusammen mit zwei Verknüpfungen $+, \cdot : K \times K \implies K$, für die gilt:

(K1) $(K, +)$ abelsche Gruppe (neutrales Element: 0)

(K2) $K^\times := K \setminus \{0\}$ abgeschlossen unter $\cdot$

(d.h. $\forall a, b \in K^\times : a \cdot b \in K^\times$)

$(K^\times, \cdot)$ abelsche Gruppe (neutrales Element: 1)

(K3) Distributivität:

$\forall a,b,c \in K: \quad a\cdot(b+c) = (a\cdot b) + (a\cdot c)$

$(a+b)\cdot c = (a\cdot c) + (b\cdot c)$

Satz (2.3.2 2.3.4d): Sei $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$ sind äquivalent:

(A) $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein Körper.

$\Updownarrow$

(B) $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist nullteilerfrei

$\Updownarrow$

(C) n ist eine Primzahl.

Komplexe Zahlen ($\mathbb{C}$)

Def (2.3.4b) Die Komplexen Zahlen sind die Menge $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $(= \mathbb{R}^2)$ zusammen mit den folgenden Verknüpfungen:

$$(a,b) + (a',b') := (a+a', b+b')$$

$$(a,b)\cdot(a',b') := (a\cdot a' - b\cdot b', ab' + ba')$$

Satz: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper.

Def (2.3.4)

Für $z = a + ib \in \mathbb{C}$ ist

$re(z) := a$ Realteil

$im(z) := b$ Imaginärteil

$\bar{z} := a - ib$ komplex konjungierte Zahl

$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ Betrag